

02 décembre 2025

Corrigé 11

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ telle que $A^{2026} + I_3 = 0$.

Solution 1.

$$A^{2026} + I_3 = 0 \iff A^{2026} = -I_3 \implies \det(A^{2026}) = \det(A)^{2026} = \det(-I_3) = -1,$$

ce qui est impossible, car $\det(A) \in \mathbb{R}$ et donc $\det(A)^{2026} \geq 0$.

Exercice 2. Soit a un nombre complexe fixé. On considère les matrices complexes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 13 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 77 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 12 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer le déterminant de A en développant par rapport à une ligne ou à une colonne.
- (b) Refaire (a) en utilisant des opérations élémentaires.
- (c) La matrice A est-elle inversible?
- (d) Calculer le déterminant de B et celui de B^2 .
- (e) Soit p un nombre premier. Si on considère B comme une matrice à coefficients dans le corps fini \mathbb{F}_p à p éléments, pour quels nombres premiers p la matrice B est-elle de rang 6?

Solution 2.

- (a) On constate qu'il n'existe qu'un seul coefficient non nul dans la première colonne de A , donc on utilise le développement par rapport à la première colonne pour calculer le déterminant de A . Alors

$$\det(A) = A_{31} \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det(A(3|1)) = i \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det(A(3|1)) = i \cdot \det(A(3|1)).$$

Notons $C := A(3|1) = \begin{pmatrix} 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et constatons qu'il n'existe qu'un seul coefficient non nul dans la quatrième colonne de C . On utilise le développement par rapport à la quatrième colonne pour calculer le déterminant de C et on obtient

$$\det(C) = C_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det(C(1|4)) = -a \cdot \det(C(1|4)).$$

Posons $D := C(1|4) = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 0 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$. La règle de Sarrus donne alors

$$\det(D) = 0 + ai + 0 - 0 - 2 - a^2 = -a^2 + ia - 2.$$

Donc $\det(A) = i \det(C) = -i \cdot a \det(D) = -i \cdot a(-a^2 + ia - 2) = ia(a^2 - ia + 2)$.

- (b) On va effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A de manière à obtenir une matrice triangulaire supérieure. Rappelons que les opérations élémentaires ont les effets suivants sur le déterminant.

Type I : Si on échange deux lignes, le déterminant change de signe.

Type II : Si on multiplie une ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$, le déterminant est multiplié par λ , mais on peut éviter le type II pour le calcul des déterminants.

Type III : Si on ajoute à une ligne un multiple scalaire d'une autre, le déterminant ne change pas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_3 \rightarrow (-5-2i)L_2 + L_3 \\ L_4 \rightarrow -iL_2 + L_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2+2i & -3+5i & a \\ 0 & 0 & -1 & a-i & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4 \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a-i & 0 \\ 0 & 0 & -2+2i & -3+5i & a \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_4 \rightarrow (2i-2)L_3 + L_4 \\ L_5 \rightarrow aL_3 + L_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7i-1+2a(i-1) & a \\ 0 & 0 & 0 & a^2-ia+2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftrightarrow L_5 \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-ia+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7i-1+2a(i-1) & a \end{pmatrix}.$$

Si $a^2 - ia + 2 = 0$, il existe une ligne nulle dans la dernière matrice, donc $\det(A) = 0$.

Si $a^2 - ia + 2 \neq 0$, alors l'opération $L_5 \rightarrow \left(\frac{-(7i-1+2a(i-1))}{a^2-ia+2}\right)L_4 + L_5$ rend la matrice de la forme suivante

$$E := \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-ia+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

qui devient une matrice triangulaire supérieure. On obtient donc

$$\det(E) = i \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (a^2 - ia + 2) \cdot a = -i(a^2 - ia + 2)a,$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit des coefficients de sa diagonale, et donc si $a^2 - ia + 2 \neq 0$,

$$\det(A) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \det(E) = -\det(E) = i(a^2 - ia + 2)a,$$

où dans le terme à droite de la première égalité, le premier facteur -1 (respectivement le deuxième, le troisième) provient de l'opération $L_1 \leftrightarrow L_3$ (respectivement, $L_3 \leftrightarrow L_4, L_4 \leftrightarrow L_5$).

Dans tous les cas, on obtient $\det(A) = i(a^2 - ia + 2)a$.

- (c) La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, d'après le deuxième théorème d'inversibilité. Or, d'après le point a),

$$\det(A) = i(a^2 - ia + 2)a = i(a - 2i)(a + i)a,$$

donc on obtient que A est inversible si et seulement si $a \neq 2i, -i, 0$.

- (d) On procède comme dans le point a). Alors

$$\det(B) = B_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det(B(1|4)) = 5 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det(B(1|4)) = (-5) \cdot \det(B(1|4)).$$

Notons que $F := B(1|4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -11 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et constatons qu'il n'existe qu'un seul co-

efficient non nul dans la quatrième colonne de F . On utilise le développement par rapport à la quatrième colonne pour calculer le déterminant de F et on obtient

$$\det(F) = F_{54} \cdot (-1)^{5+4} \cdot \det(F(5|4)) = (-3) \cdot \det(F(5|4)).$$

Or, $G := F(5|4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -11 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. De même, on obtient

$$\det(G) = G_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det(G(2|2)) = 7 \cdot \det(G(2|2)).$$

Comme $G(2|2) = \begin{pmatrix} 2 & -11 & -3 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et la règle de Sarrus donne $\det(G(2|2)) = -10$, on obtient

$$\det(B) = (-5) \cdot (-3) \cdot 7 \cdot (-10) = -1050.$$

Le déterminant de B^2 est $\det(B^2) = (\det(B))^2 = (-1050)^2 = 1102500$.

- (e) La matrice B est de rang 6 si et seulement si elle est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Le point d) donne $\det(B) = -1050 = -2 \times 3 \times 5^2 \times 7$, et donc ce déterminant est non nul dans \mathbb{F}_p si et seulement si $p \neq 2, 3, 5, 7$.

Exercice 3. Fixons K un corps. Soient $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(K), B \in \mathbb{M}_{n \times m}(K), C \in \mathbb{M}_{m \times n}(K)$ et $D \in \mathbb{M}_{m \times m}(K)$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Solution 3. Pour la première égalité, on va effectuer des opérations élémentaires de type I and III pour rendre la matrice triangulaire supérieure. D'abord on fait des opérations élémentaires de type I et III sur les n premières lignes pour que A devienne une matrice triangulaire supérieure et notons que ces opérations ne changent pas D . Supposons que la matrice devienne $\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec A' triangulaire supérieure. Ensuite on fait des opérations élémentaires sur les m dernières lignes de cette dernière matrice pour que D devienne une matrice triangulaire supérieure et on obtient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}$ avec A' et D' triangulaires supérieures (Constatons que ces opérations ne changent pas B'). Cette dernière matrice est donc triangulaire supérieure. Comme le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit des coefficients de la diagonale, on obtient que $\det \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} = \det(A') \cdot \det(D')$.

Supposons qu'on a utilisé r fois des opérations de type I pour passer de A à A' et s fois des opérations de type I pour passer de D à D' . Alors $\det(A) = (-1)^r \det(A')$ et $\det(D) = (-1)^s \det(D')$. En plus on a aussi

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = (-1)^r \det \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D \end{pmatrix} = (-1)^{r+s} \det \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}.$$

Cela implique que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = (-1)^{r+s} \det \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} = (-1)^{r+s} \det(A') \cdot \det(D') = \det(A) \cdot \det(D).$$

Pour montrer la deuxième égalité de l'exercice, on utilise le fait que le déterminant de la transposée d'une matrice est égal à celui de la matrice originale. Comme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix}$, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^t \right) = \det \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix} = \det(A^t) \cdot \det(D^t) = \det(A) \cdot \det(D).$$

Exercice 4. Soit $\alpha : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un K -espace vectoriel V . Soit λ une valeur propre de α . L'espace propre associé à λ est par définition $E_\lambda(\alpha) = \{v \in V \mid \alpha(v) = \lambda v\}$.

- Montrer que $E_\lambda(\alpha)$ est un sous-espace vectoriel de V .
- Montrer que $E_\lambda(\alpha) = \{\text{vecteurs propres correspondant à } \lambda\} \cup \{0\}$.
- Montrer que $E_\lambda(\alpha)$ est invariant par α .
- Soit μ une valeur propre de α , différente de λ . Montrer que $E_\lambda(\alpha) \cap E_\mu(\alpha) = \{0\}$.

Solution 4.

- Comme $\alpha(0) = 0 = \lambda \cdot 0$, on a $0 \in E_\lambda(\alpha)$ et cet ensemble n'est pas vide. Soient $v, w \in E_\lambda(\alpha)$ et $\mu \in K$. Alors

$$\alpha(\mu v + w) = \mu \alpha(v) + \alpha(w) = \mu \lambda v + \lambda w = \lambda(\mu v + w),$$

où on a utilisé la linéarité de α dans la première égalité. Cela montre que $\mu v + w \in E_\lambda(\alpha)$ et donc $E_\lambda(\alpha)$ est un sous-espace vectoriel de V .

- (b) Pour tout $v \in E_\lambda(\alpha)$, on a $\alpha(v) = \lambda v$. Alors soit $v = 0$, soit $v \neq 0$ qui est par définition un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ . Donc $E_\lambda(\alpha) \subset \{\text{vecteurs propres correspondant à } \lambda\} \cup \{0\}$.

L'autre inclusion est évidente.

On a montré que $E_\lambda(\alpha) = \{\text{vecteurs propres correspondant à } \lambda\} \cup \{0\}$.

- (c) Pour tout $v \in E_\lambda(\alpha)$, on a $\alpha(v) = \lambda v$. D'après le point a), $E_\lambda(\alpha)$ est un sous-espace vectoriel de V et donc $\alpha(v) = \lambda v \in E_\lambda$. On a montré que $E_\lambda(\alpha)$ est invariant par α .
- (d) Soit $v \in E_\lambda(\alpha) \cap E_\mu(\alpha)$. Alors $v \in E_\lambda(\alpha)$ et $v \in E_\mu(\alpha)$. Donc $\lambda v = \alpha(v) = \mu v$ et on obtient que $(\lambda - \mu)v = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, cela implique $v = 0$. Donc $E_\lambda(\alpha) \cap E_\mu(\alpha) = \{0\}$.
-

Exercice 5. Soient V un K -espace vectoriel et $\phi \in \mathcal{L}(V, V)$. Soient $U, W \leq V$ des sous-espaces ϕ -invariants. Montrer que $W \cap U$ et $W + U$ sont aussi ϕ -invariants.

Solution 5. Soit $x \in U \cap W$; comme U est ϕ -invariant, $\phi(x) \in U$, de même, comme W est ϕ -invariant, $\phi(x) \in W$. On déduit que $\phi(x) \in U \cap W$, ce qui montre que $U \cap W$ est ϕ -invariant. Maintenant soit $x \in W + U$. Donc il existe $w \in W$ et $u \in U$ tels que $x = w + u$. On utilise que chacun des sous-espaces U et W est ϕ -invariant pour voir que $\phi(w) \in W$ et $\phi(u) \in U$. On a alors $\phi(x) = \phi(w + u) = \phi(w) + \phi(u) \in W + U$, ce qui montre que $W + U$ est aussi ϕ -invariant.

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathcal{L}(V, V)$ une transformation linéaire d'un K -espace vectoriel V de dimension finie. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\ker(\alpha^n)$ et $\text{im}(\alpha^n)$ sont invariants par α .

Solution 6. Soit $v \in \ker(\alpha^n)$. On a donc $\alpha^n(v) = 0$. Il faut montrer que $\alpha(v) \in \ker(\alpha^n)$, en d'autres termes, $\alpha^n(\alpha(v)) = 0$. En effet, $\alpha^n(\alpha(v)) = \alpha(\alpha^n(v)) = \alpha(0) = 0$.

Soit $v \in \text{Im}(\alpha^n)$. Alors il existe $u \in V$ tel que $\alpha^n(u) = v$. Il faut montrer que $\alpha(v) \in \text{Im}(\alpha^n)$. En effet, $\alpha(v) = \alpha(\alpha^n(u)) = \alpha^n(\alpha(u)) \in \text{Im}(\alpha^n)$.

Exercice 7. Soit $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 est

$$M = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de α et déterminer les valeurs propres de α et les espaces propres correspondants.

Solution 7. Pour faciliter l'écriture, posons $u = 14t$, de sorte que le polynôme caractéristique de α est

$$\chi_\alpha(u) = (-1)^3 \left(\frac{1}{14}\right)^3 \det \begin{pmatrix} 13 - u & 2 & -3 \\ 2 & 10 - u & 6 \\ -3 & 6 & 5 - u \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{14}\right)^3 u(u - 14)^2.$$

Le facteur de $(-1)^3$ apparaît car nous calculons $\det(M - tI_3)$ au lieu de $\det(M - tI_3)$. Les valeurs propres de α sont donc 0 et $\frac{14}{14} = 1$.

Étudions maintenant les espaces propres, à commencer par $E_0 = \ker(\alpha)$. Un vecteur $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ appartient à $\ker(\alpha)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 13x + 2y - 3z & = 0 \\ 2x + 10y + 6z & = 0 \\ -3x + 6y + 5z & = 0 \end{cases}$$

Eliminant y entre la première et la deuxième équation, puis entre la première et la troisième, on trouve la même relation : $z = 3x$. Remplaçant dans n'importe quelle équation on trouve $y = -2x$. On a donc $\ker(\alpha) = \text{Vect}(e_1 - 2e_2 + 3e_3)$. Interprétation géométrique : $\ker(\alpha)$ est une droite passant par l'origine et perpendiculaire au plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

Passons maintenant à E_1 . Un vecteur $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ appartient à E_1 si et seulement si

$$\begin{cases} 13x + 2y - 3z = 14x \\ 2x + 10y + 6z = 14y \\ -3x + 6y + 5z = 14z \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \\ -3x + 6y - 9z = 0 \end{cases}$$

Ces trois équations sont les mêmes : $x - 2y + 3z = 0$. L'espace propre E_1 est le plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$, ou encore $\text{Vect}(3e_1 - e_3, 2e_1 + e_2)$. L'application α est en fait la projection orthogonale sur ce plan.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Trouver toutes les valeurs propres de A et les espaces propres associés.

Solution 8. On calcule le polynôme caractéristique de A . Noter qu'il est parfois plus facile de calculer $\det(A - tI)$ au lieu de $\det(tI - A)$, qui est simplement un multiple scalaire (± 1) du polynôme caractéristique pour trouver les valeurs :

$$\det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & -4 \\ 0 & -\sqrt{2} - t & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} = (-\sqrt{2} - t) \det \begin{pmatrix} -t & -4 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (-\sqrt{2} - t)(t^2 + 4)$$

Ensuite, les valeurs propres de A sont les racines de ce polynôme, qui sont $-\sqrt{2}, 2i, -2i$.

Pour les espaces propres associés on résout les trois systèmes homogènes : $(A + \sqrt{2}I_3)X = 0$, $(A - 2iI_3)X = 0$ et $(A + 2iI_3)X = 0$ et on trouve respectivement les espaces propres : $E_{-\sqrt{2}} = \text{Vect}(0, 1, 0)$, $E_{2i} = \text{Vect}((2i, 0, 1))$ et $E_{-2i} = \text{Vect}((-2i, 0, 1))$.

Exercice 9. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel avec base ordonnée $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ et soit $\alpha \in \mathcal{L}(V, V)$ telle que

$$[\alpha]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que $2f_1 - f_2$ est un vecteur propre de α et en déduire une valeur propre de α .
- Montrer que -5 est une valeur propre de α .
- Trouver $E_0(\alpha)$ et $E_{-5}(\alpha)$.

Solution 9. Posons $A = (\alpha)_{B,B}$.

(a) On a que $\alpha(2f_1 - f_2)_B = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Cela implique que 0 est une valeur propre de α car f_1 et f_2 sont linéairement indépendants et donc $2f_1 - f_2 \neq 0_V$.

(b) On note que $\alpha(f_4) = -5f_4$, d'après la dernière colonne de A . Donc f_4 est un vecteur propre de valeur propre -5 .

(c) On cherche tous $v \in V$ tel que $\alpha(v) = 0_V$, donc tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$ telle que $A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$. On

échelonne la matrice A et on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La deuxième variable b est libre et les autres

sont principales; on trouve $a = -2b$, $c = 0$ et $d = 0$. Donc $\dim E_0 = 1$ et $E_0 = \text{Vect}(2f_1 - f_2)$.

Pour la valeur propre -5 , on résout le système $A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, qui est équivalent au système

$(A + 5I_4) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$. On échelonne la matrice $(A + 5I_4)$ et on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d est libre

et $a = 0 = b = c$ et on trouve $E_{-5} = \text{Vect}(f_4)$.